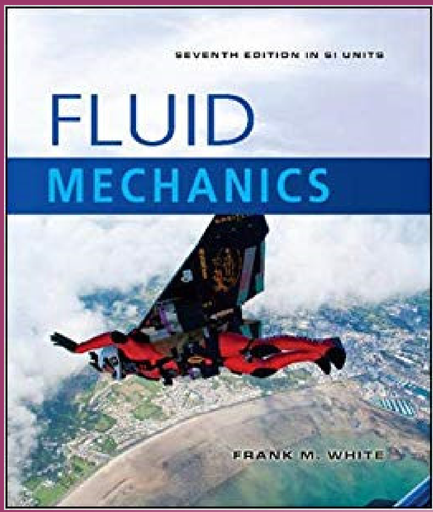


مکانیک سیالات ۲

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

بخش دوم از مباحث فصل هفتم:
جریان لایه مرزی – معادلات لایه مرزی و حل بلازیوس

کلاس درس دکتر نوروزی
فروردین ۹۹

بعضی پارامترهای مهم در آشکارسازی و آنالیز جریان

خط جریان (Streamline): مکان هندسی نقاطی است که بردارهای سرعت جریان بر آن مماس هستند.

خط مسیر (Pathline): یک خط مسیر، مسیر واقعی طی شده توسط یک ذره سیال است.

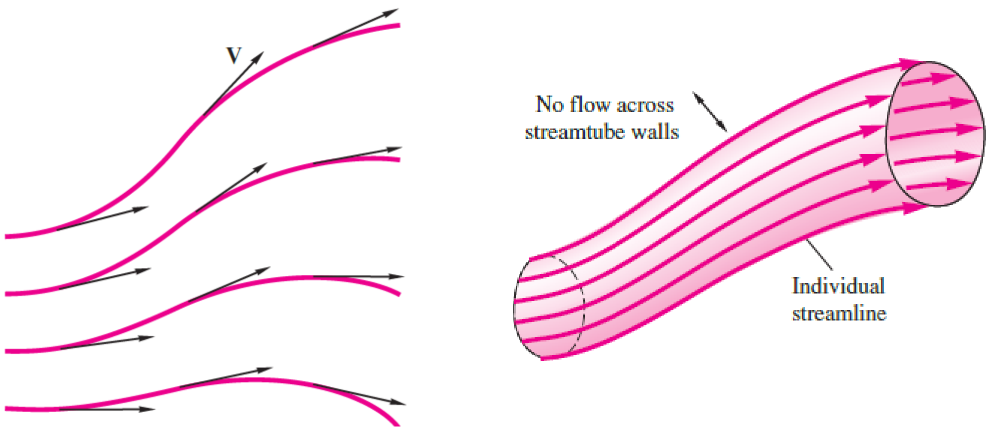
خط رگه (Streakline): مکان هندسی ذراتی است که پیشتر از یک نقطه مشخص (مانند محل تزریقشان) عبور کرده اند.

خط زمانی (Timeline): مجموعه ذرات سیال است که یک خط را در یک لحظه مشخص تشکیل می دهند

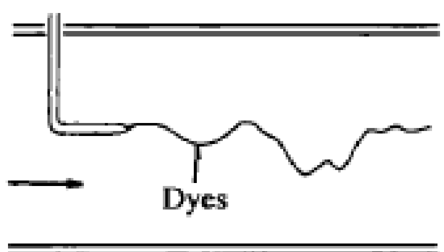
نکته ۱: خط جریان بیشتر در مطالعات تحلیلی و عددی مورد استفاده قرار می گیرد اما سایر خطوط فوق الذکر معمولا در کارهای ازمایشگاهی استفاده می شوند. در جریانهای دائمی، خط جریان، خط مسیر و خط رگه بر هم منطبق هستند.

نکته ۲: در جریانهای غیرلزج، روی خطوط جریان معادله برنولی برقرار است.

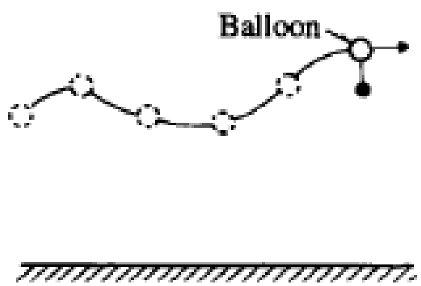
نکته ۳: دبی گذرا در راستای عمود بر خطوط جریان صفر است.



(a) Streamline



(b) Streak line



(c) Path line

تابع جریان (Stream Function)

چنانچه $d\mathbf{r}$ بردار جابجایی در راستای خط جریان باشد، بنابراین از شکل زیر نتیجه می شود:

$$\text{Along Streamline:}\quad \frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{|d\mathbf{r}|}{|\mathbf{V}|} \tag{۱}$$

و لذا برای جریان دو بعدی در صفحه xy داریم:

$$\text{Along Streamline:}\quad \frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}\ \rightarrow\ udy-vdx=0 \tag{۲}$$

تابع جریان، یک تابع اسکالر است که برای **جریانهای تراکم ناپذیر دوبعدی** تعریف می شود به نحوی که مقدار این تابع روی هر خط جریان عددی ثابت است. از آنجا که مقدار تابع جریان روی خط جریان ثابت است، بنابراین در امتداد خط جریان داریم:

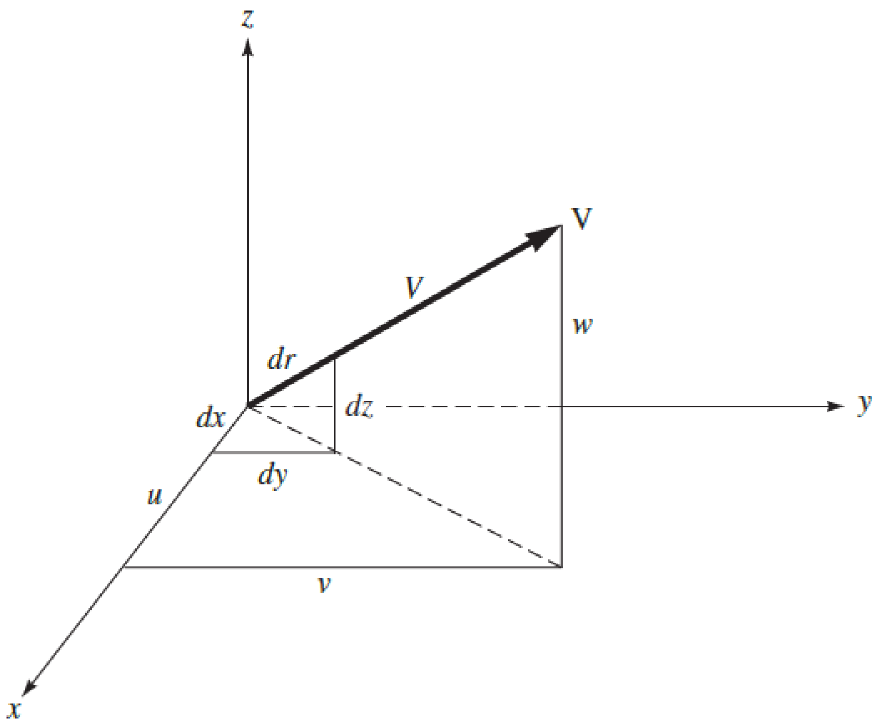
$$\text{Along Streamline:}\quad d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=0 \tag{۳}$$

با مقایسه روابط (۳) و (۴) نتیجه می شود:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ \ v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{۴}$$

می توان دریافت که اختلاف تابع جریان دو خط جریان، معرف دبی گذرا از بین آنها است و همچنین به سادگی می توان نشان داد که تابع جریان همواره معادله پیوستگی را ارضا می کند:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\ \rightarrow\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0\ \rightarrow\ 0=0 \tag{۵}$$



نکته: در سایر دستگاههای مختصات متعامد دو بعدی امکان تعریف تابع جریان وجود دارد.

آنالیز مرتبه بزرگی برای استخراج معادلات لایه مرزی دو بعدی

آنالیز مرتبه بزرگی یک تکنیک ریاضی برای حل معادلات دیفرانسیل از طریق تشخیص و بکارگیری ترمهای مهم (بزرگ) و صرفنظر از ترمهای کوچک است. معادلات ناویر-استوکس در جریان دو بعدی تراکم ناپذیر به صورت زیر هستند:

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\cdot\mathbf{V}=0\\ \rho\dfrac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho g_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=\rho g_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\end{array}\right. \qquad (۶)$$

برای جریان دائمی با صرفنظر از اثرات گرانش داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\end{array}\right. \qquad \& \qquad \nu=\frac{\mu}{\rho} \qquad (۷)$$

توجه داشته باشید که در مساله لایه مرزی سرعت در جهت x بسیار بزرگتر از سرعت در جهت y است. به عبارت دیگر می توان u را از مرتبه بزرگی یک و v را از مرتبه بزرگی ε در نظر گرفت.

$$u \gg v, \quad u = O(I) \ \ \& \ \ v = O(\varepsilon) \qquad (۸)$$

همچنین ضخامت لایه مرزی کوچک بوده و لذا تغییرات در جهت y بسیار بزرگتر از تغییرات در جهت x هستند:

$$\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = O(I) \ \ \& \ \ \frac{\partial}{\partial x} = O(\varepsilon) \qquad (۹)$$

همچنین در بسیاری از سیالات از جمله گازها (مانند هوا) و در مایعات (مانند آب) ویسکوزیته سینماتیکی عددی کوچک است. بنابراین می توان نتیجه گرفت:

$$\nu = O(\varepsilon) \qquad (۱۰)$$

فرض موجود در رابطه (۱۰) معادل آن است که عدد رینولدز جریان به اندازه کافی بزرگ است: $\mathrm{Re} = \dfrac{Ux}{\nu} \gg 1$

حال از رابطه (۷) برای معادله مومنتوم در جهت y نتیجه می شود:

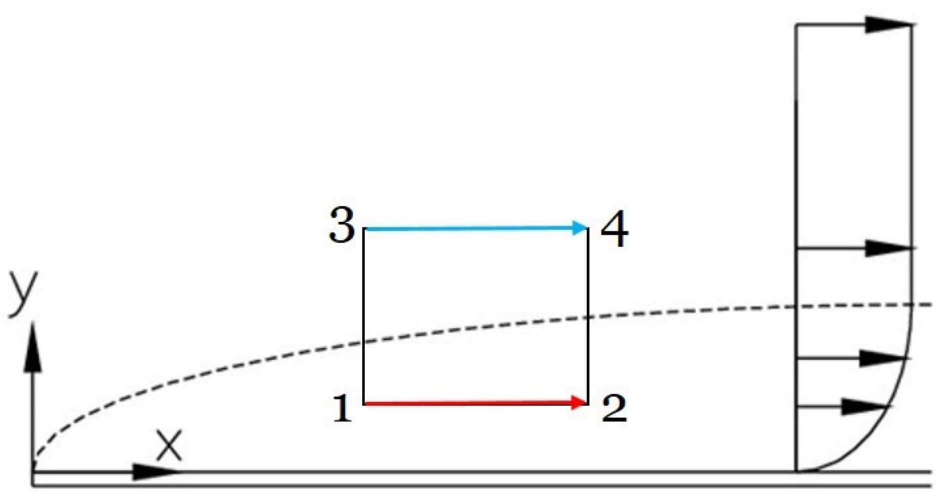
$$\underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}}_{O(\varepsilon^2)} + \underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}}_{O(\varepsilon^2)} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{O(\varepsilon^3)} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{O(\varepsilon^2)} \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = O(\varepsilon^2) \qquad (۱۱)$$

مطابق رابطه (۱۱)، گرادیان فشار در جهت y از مرتبه ε^2 بوده و لذا فوق العاده کوچک و قابل صرفنظر است، پس:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = O(\varepsilon^2) \longrightarrow p \approx p(x) \text{ only} \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} \qquad (۱۲)$$

از آنجا که از گرادیان فشار در جهت y صرفنظر شده است، با توجه به شکل زیر می توان نتیجه گرفت که گرادیان فشار در مسیر 12 (که داخل لایه مرزی است) تفاوتی با مسیر 34 (که خارج لایه مرزی است)، ندارد:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \rightarrow p_1 = p_3 \;\&\; p_2 = p_4 \rightarrow p_2 - p_1 = p_4 - p_3 \rightarrow \left.\frac{dp}{dx}\right|_{12} = \left.\frac{dp}{dx}\right|_{34} \qquad (۱۳)$$



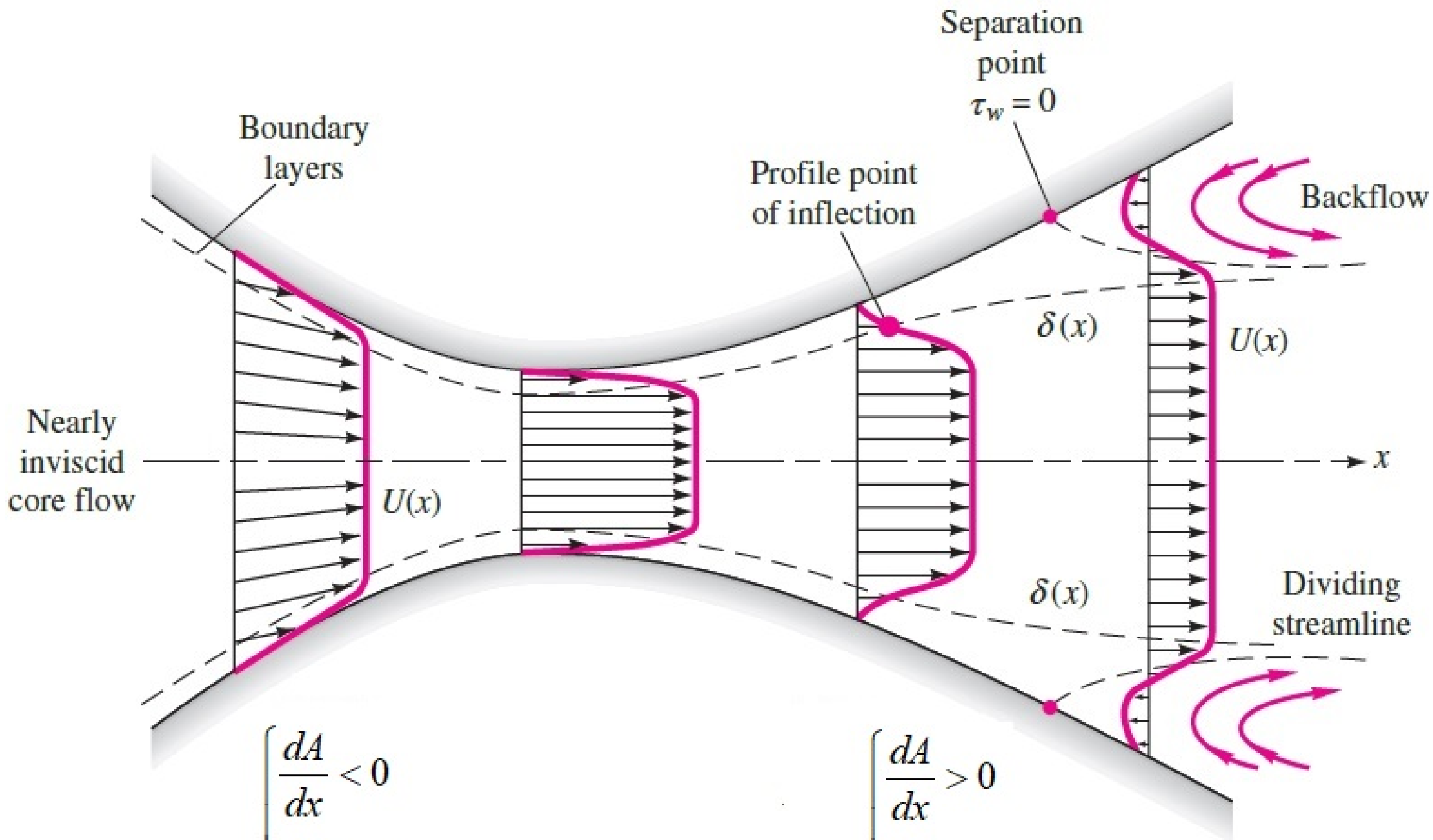
بنابراین از رابطه (۱۳) می توان نتیجه گرفت که گرادیان فشار داخل لایه مرزی با گرادیان فشار خارج لایه مرزی یکسان است. در خارج لایه مرزی جریان پتانسیل (غیر لزج غیر چرخشی) داریم و لذا معادله برنولی در این جریان حاکم است. بنابراین:

$$p+\frac{1}{2}\rho U^2=cte \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dx}+\rho U\frac{dU}{dx}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dx}=-\rho U\frac{dU}{dx} \tag{۱۴}$$

در حالت کلی سرعت جریان در خارج لایه مرزی (U) می تواند نسبت به x تغییر کند که نمونه بارز آن جریان در نازلها و دیفیوزرها (شیپوره های همگرا و واگرا) است که در شکل اسلاید بعدی نشان داده شده اند.

در ادامه برای مرتبه بزرگی ترمهای معادله پیوستگی و معادله مومنتوم در جهت X داریم:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{O(\varepsilon)}+\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{O(\varepsilon)}=0 \\ \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{O(\varepsilon)}+\underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{O(\varepsilon)}=\underbrace{U\frac{dU}{dx}}_{O(\varepsilon)}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{O(\varepsilon^2)}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{O(\varepsilon)} \end{cases} \tag{۱۵}$$



$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dx} < 0 \\ \dfrac{dU}{dx} > 0 \\ \dfrac{dp}{dx} < 0 \end{cases}$$

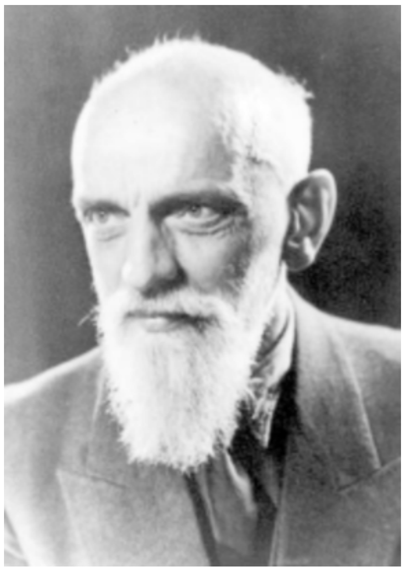
$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dx} > 0 \\ \dfrac{dU}{dx} < 0 \\ \dfrac{dp}{dx} > 0 \end{cases}$$

در معادله (۱۵) دیده می شود که یکی از ترمها ($\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) از مرتبه ε^2 است حال آنکه سایر ترمها از مرتبه ε هستند. بنابراین می توان از این ترم در مقابل سایر ترمها صرفنظر کرد. بدیهی است که در این معادلات ترمهای دارای مرتبه یکسان ε در مقابل یکدیگر قابل صرفنظر نیستند. برای مثال در معادله پیوستگی هر دو ترم $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ از مرتبه ε هستند و نمی توان از آنها در مقابل هم صرفنظر کرد. در نهایت می توان نتیجه گرفت که معادله پیوستگی و بیشتر ترمهای معادله x مومنتوم بجز $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ از مرتبه ε هستند حال آنکه کل معادله مومنتوم در جهت y از مرتبه ε^2 است. بنابراین برای بزرگترین ترمهای این مجموعه معادلات که از مرتبه ε هستند، داریم:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = U\dfrac{dU}{dx} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}} \qquad (۱۶)$$

معادلات فوق به مجموعه معادلات لایه مرزی معروف هستند که شامل دو معادله و دو مجهول u و v می باشند. ضمنا مقدار سرعت در خارج لایه مرزی U بطور جداگانه از تئوری جریان پتانسیل (مباحث فصل هشتم) محاسبه می شود.

حل دقیق بلازیوس برای لایه مرزی آرام دو بعدی بدون گرادیان فشار



Paul Richard Heinrich Blasius

در سال ۱۹۰۸ و فقط ۴ سال پس از مطرح شدن تئوری لایه مرزی، بلازیوس (یکی از شاگردان پرانتل) حل تحلیلی را برای مساله **لایه مرزی آرام دو بعدی بدون گرادیان فشار** ارائه کرد. حل ارائه شده از نوع خودتشابهی است (یک روش تحلیلی نسبتا ابتکاری). در این روش حل، معمولا از یک متغیر جدید استفاده می شود که نقش متغیرهای مساله را بازی می کند. بلازیوس متغیر خود تشابهی η را به شکل زیر برای مساله لایه مرزی معرفی نمود که دربرگیرنده هر دو متغیر x و y است:

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \qquad (۱۷)$$

برای نمونه در هر دو حالت $x = 0$ و $y \to \infty$ (یعنی ابتدای لایه مرزی و نواحی بسیار دور از دیوار) سرعت برابر سرعت بالا دست جریان U است و بنابراین این دو موقعیت به یک سرعت اشاره دارند. مطابق رابطه (۱۷)، در هر دو حالت $x = 0$ و $y \to \infty$ نیز مقدار متغیر خودتشابهی به یک مقدار برای متغیر خودتشابهی (یعنی $\eta \to \infty$) اشاره می کنند.

بلازیوس تابع خود تشابهی f را نیز برای مساله لایه مرزی معرفی نمود که دربرگیرنده هر دو تابع مجهول این مساله (یعنی u و v) است. طبق تعریف بلازیوس، رابطه این تابع خود تشابهی f با تابع جریان (ψ) به شکل زیر است:

$$\psi = \sqrt{2\nu Ux}\, f(\eta) \tag{۱۸}$$

لذا طبق رابطه (۴) برای مولفه های سرعت u داریم:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{2\nu Ux}\,\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{2\nu Ux}\,\frac{df}{d\eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{۱۹}$$

از رابطه (۱۷) برای مشتق η نسبت به y نتیجه می شود:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \tag{۲۰}$$

با جایگذاری رابطه (۲۰) در رابطه (۱۹)، داریم:

$$u = \sqrt{2\nu Ux}\, f'(\eta)\sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \longrightarrow u = Uf'(\eta) \tag{۲۱}$$

به همین شکل از روابط (۴) و (۱۸) می توان به رابطه زیر برای مولفه سرعت v رسید:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{\nu U}{2x}}\,(\eta f' - f) \tag{۲۲}$$

بایستی توجه داشت که مطابق رابطه (۱۴)، با صفر شدن گرادیان فشار، ترم $U\frac{dU}{dx}$ نیز در معادله لایه مرزی (رابطه (۱۶)) صفر خواهد بود. لذا از رابطه (۱۶)، برای جریان روی صفحه تخت بدون گرادیان فشار داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \qquad (۲۳)$$

مطابق رابطه (۱۸)، در تعریف تابع خود تشابهی f از تابع جریان استفاده شده است. لذا به دلیل بکارگیری تابع جریان، معادله پیوستگی بصورت خود بخود ارضا شده است. حال در معادله (۲۳)، صرفا باید معادله مومنتوم در جهت x حل شود. با قرار دادن مقدار u و v از روابط (۲۱) و (۲۲) در معادله مومنتوم در جهت x رابطه (۲۳)، معادله بلازیوس بدست می آید:

$$\boxed{f'''+ff''=0} \qquad (۲۴)$$

با توجه به روابط (۲۱) و (۲۲)، شرایط مرزی این معادله نیز به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} &\text{At wall}: y=0 \Rightarrow \eta=0: \quad u=v=0 \quad \Rightarrow \\ &\text{At } y\to\infty \text{ or } x=0 \Rightarrow \eta\to\infty: u=U \Rightarrow \end{aligned} \boxed{\begin{aligned} &f(0)=0 \ \ \& \ \ f'(0)=0 \\ &f'(\infty)=1 \end{aligned}} \qquad (۲۵)$$

تمرین: معادله (۲۴) را با ذکر جزئیات اثبات کنید.

بایستی توجه داشت که معادله بلازیوس (معادله (۲۴))، یک معادله دیفرانسیل مرتبه ای **غیرخطی** است و لذا حل دقیق ندارد. تاکنون روشهای متعددی برای حل تقریبی این مساله ارائه شده است (عمدتا حلهای سری). در جدول اسلاید بعد، نتایج مربوط به حل عددی (با استفاده از برنامه نویسی فرترن) معادله (۲۴) با ارضای شرایط مرزی (۲۵) آمده است. طبق قرار داد، لایه مرزی در موقعیتی است که سرعت به 0.99 سرعت جریان بالادست می رسد (u=0.99U). طبق رابطه (۲۱)، در موقعیت لایه مرزی مقدار f' برابر 0.99 خواهد شد. از جدول اسلاید بعد مقدار f' در $\eta = 3.5$ برابر 0.99 است. بنابراین از رابطه (۱۷) داریم:

$$3.5 = \delta\sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \tag{۲۶}$$

مسلم است که در موقعیت $\eta = 3.5$ روی لایه مرزی قرار داریم و بنابراین در رابطه (۲۶)، مقدار δ قرار داده شده است. با ساده کردن رابطه (۲۶)، رابطه دقیق ضخمات لایه مرزی بدست می آید:

$$3.5 = \delta\sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \;\rightarrow\; \delta = \frac{3.5\sqrt{2\nu x}}{\sqrt{U}} = \frac{5.0\sqrt{x}}{\sqrt{\dfrac{U}{\nu}}} \;\rightarrow\; \frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{\dfrac{Ux}{\nu}}} \;\rightarrow\; \boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}} \tag{۲۷}$$

بایستی توجه داشت که مقدار $1-\dfrac{u}{U}$ در خارج لایه مرزی صفر است. بنابراین برای ضخامت جابجایی می توان نوشت:

$$\delta^* = \int_0^{\delta}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy = \int_0^{\infty}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}}\int_0^{\infty}(1-f')d\eta = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}}\left[\eta - f\right]\Big|_0^{\infty} \tag{۲۸}$$

Numerical solution of the Blasius flat-plate relation, Eq. (4-45)

η	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$
0.0	0.0	0.0	0.46960
0.1	0.00235	0.04696	0.46956
0.2	0.00939	0.09391	0.46931
0.3	0.02113	0.14081	0.46861
0.4	0.03755	0.18761	0.46725
0.5	0.05864	0.23423	0.46503
0.6	0.08439	0.28058	0.46173
0.7	0.11474	0.32653	0.45718
0.8	0.14967	0.37196	0.45119
0.9	0.18911	0.41672	0.44363
1.0	0.23299	0.46063	0.43438
1.1	0.28121	0.50354	0.42337
1.2	0.33366	0.54525	0.41057
1.3	0.39021	0.58559	0.39598
1.4	0.45072	0.62439	0.37969
1.5	0.51503	0.66147	0.36180
1.6	0.58296	0.69670	0.34249
1.7	0.65430	0.72993	0.32195
1.8	0.72887	0.76106	0.30045
1.9	0.80644	0.79000	0.27825
2.0	0.88680	0.81669	0.25567
2.2	1.05495	0.86330	0.21058
2.4	1.23153	0.90107	0.16756
2.6	1.41482	0.93060	0.12861
2.8	1.60328	0.95288	0.09511
3.0	1.79557	0.96905	0.06771
3.2	1.99058	0.98037	0.04637
3.4	2.18747	0.98797	0.03054
3.6	2.38559	0.99289	0.01933
3.8	2.58450	0.99594	0.01176
4.0	2.78388	0.99777	0.00687
4.2	2.98355	0.99882	0.00386
4.4	3.18338	0.99940	0.00208
4.6	3.38329	0.99970	0.00108
4.8	3.58325	0.99986	0.00054
5.0	3.78323	0.99994	0.00026
5.2	3.98322	0.999971	0.000119
5.4	4.18322	0.999988	0.000052
5.6	4.38322	0.999995	0.000022
5.8	4.58322	0.999998	0.000009
6.0	4.78322	0.999999	0.000003

با توجه به جدول نتایج حل عددی بلازیوس، می توان دریافت که در مقادیر بزرگ η، به ازای یک مقدار مشخص برای ازدیاد η، مقدار f نیز به همان مقدار افزایش می یابد. به عبارت دیگر اختلاف $\eta - f$ به ازای مقادیر بزرگ η مقداری ثابت است. ضمنا در $\eta = 0$ نیز مقدار f برابر صفر می باشد. بنابراین با توجه به داده های جدول برای رابطه (۲۸) داریم:

$$\delta^* = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}}\left[\eta - f\right]\Big|_0^\infty = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}} \times \left[\lim_{\eta\to\infty} \eta - f\right] = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}} \times 1.21678 \qquad (۲۹)$$

همانگونه که برای δ از رابطه (۲۶) به (۲۷) رسیدیم، از رابطه فوق هم می توانیم برای δ^* به رابطه زیر برسیم:

$$\boxed{\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.7208}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}} \qquad (۳۰)$$

برای محاسبه θ می توانیم از رابطه انتگرال کارمن استفاده کنیم:

$$\left.\begin{aligned} &\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \\ &\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\bigg|_{\eta=0} = \mu U f''(\eta)\sqrt{\frac{U}{2\nu x}}\bigg|_{\eta=0} = \mu U f''(0)\sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \mu U f''(0)\sqrt{\frac{U}{2\nu x}} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \sqrt{\frac{\nu}{2Ux}} f''(0) \qquad (۳۱)$$

$$\rightarrow \theta = \int_0^x \sqrt{\frac{\nu}{2Ux}} f''(0)dx = \sqrt{\frac{\nu}{2U}} 2x^{1/2} f''(0)\Big|_0^x = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}} f''(0) = 0.4696\sqrt{\frac{2\nu x}{U}}$$

مجددا همانگونه که برای δ از رابطه (۲۶) به (۲۷) رسیدیم، از رابطه (۳۱) هم می توانیم برای θ به رابطه زیر برسیم:

$$\boxed{\frac{\theta}{x}=\frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}} \qquad (۳۲)$$

برای محاسبه ضریب اصطکاک به تنش برشی دیواره نیاز داریم که قبلا در داخل رابطه (۳۱)، آنرا بدست آورده بودیم:

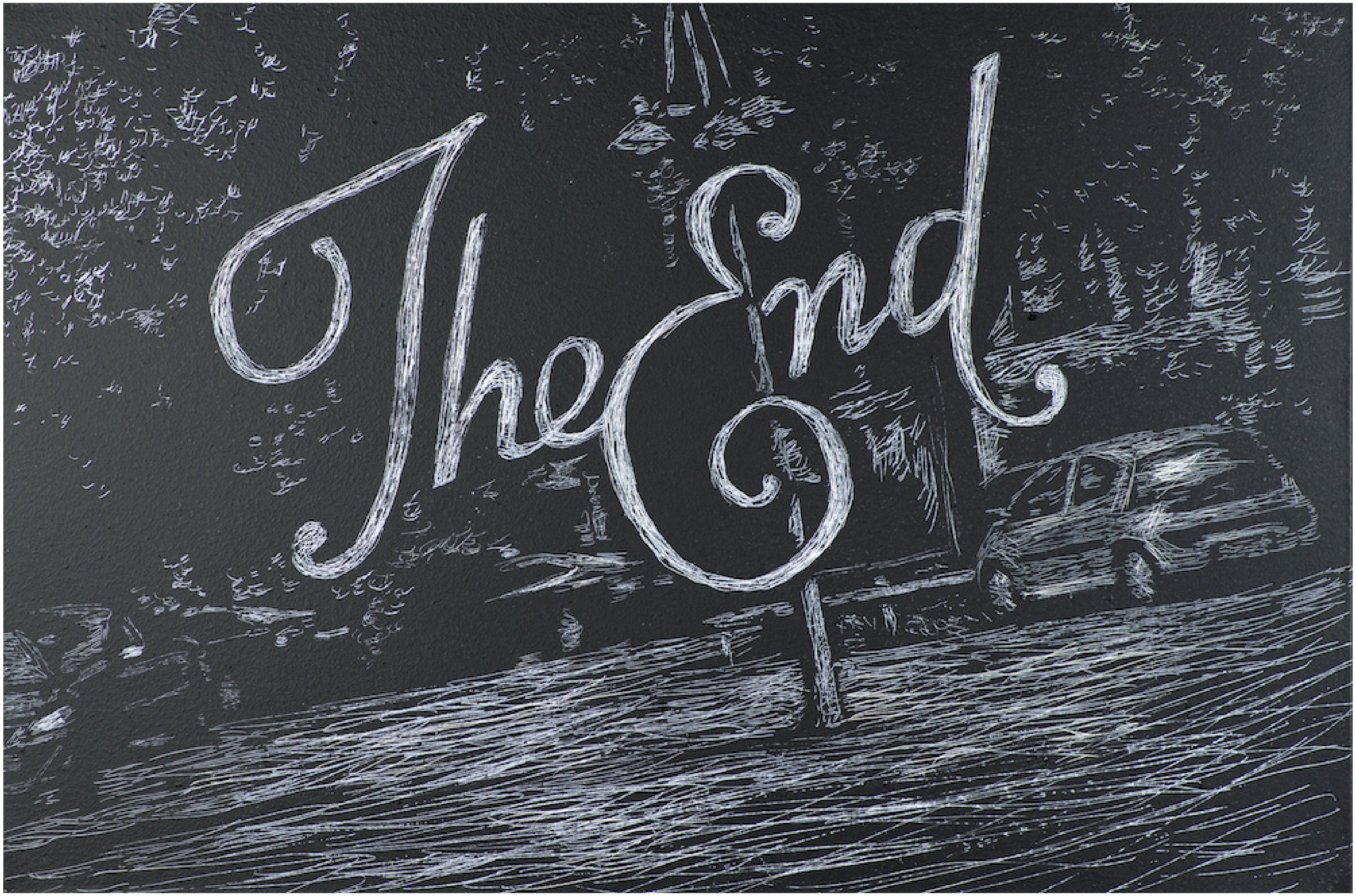
$$C_f=\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}=\frac{\mu U f''(0)\sqrt{\frac{U}{2\nu x}}}{\frac{1}{2}\rho U^2}=\frac{\sqrt{2}f''(0)}{\sqrt{\frac{Ux}{\nu}}}\rightarrow \boxed{C_f=\frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}=\frac{\theta}{x}} \qquad (۳۳)$$

برای ضریب درگ می توان از رابطه نیروی درگ $D=\rho U^2 b\theta$ که جلسه قبل اثبات کردیم، استفاده نماییم:

$$C_D=\frac{D}{\frac{1}{2}\rho A U^2}=\frac{\rho U^2 b\theta(L)}{\frac{1}{2}\rho b L U^2}=\frac{2\theta(L)}{L}\xrightarrow{\text{From Eq. (32)}}\boxed{C_D=\frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}=2C_f(L)} \qquad (۳۴)$$

در نهایت برای ضریب شکل داریم:

$$H=\frac{\delta^*}{\theta}\xrightarrow{\text{From Eqs. (30) and (32)}}\boxed{H=2.59} \qquad (۳۵)$$


The End